Aula 11

Centro de massa e Momento linear I

Sumário

O centro de massa

A segunda Lei de Newton para sistemas de partículas

O momento linear

O momento linear de um sistema de partículas

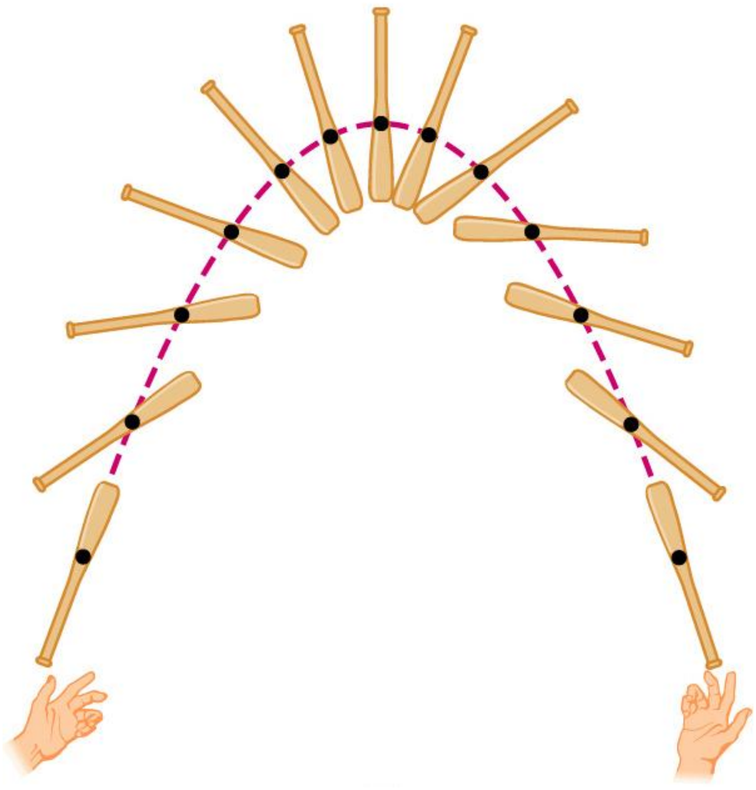
A conservação do momento linear

O Centro de Massa

Há um ponto especial num sistema de partículas ou num objecto, denominado ***centro de massa***, que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto;

O sistema mover-se-á como se uma força exterior estivesse aplicada a uma partícula de massa M, a massa total do sistema, concentrada no centro de massa.

O Centro de Massa



Coordenadas do Centro de Massa

As coordenadas do centro de massa são:

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \quad y_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \quad z_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

em que *M* é a massa total do sistema.

A Posição do Centro de Massa

O centro de massa pode ser definido pelo vector posição $\vec{r}_{\mathrm{CM}}$,

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

$\vec{r}_i$ é a posição da *i* – ésima partícula, definida por:

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

Velocidade e aceleração do Centro de Massa

A velocidade do centro de massa é:

$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{r}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

A aceleração do centro de massa é:

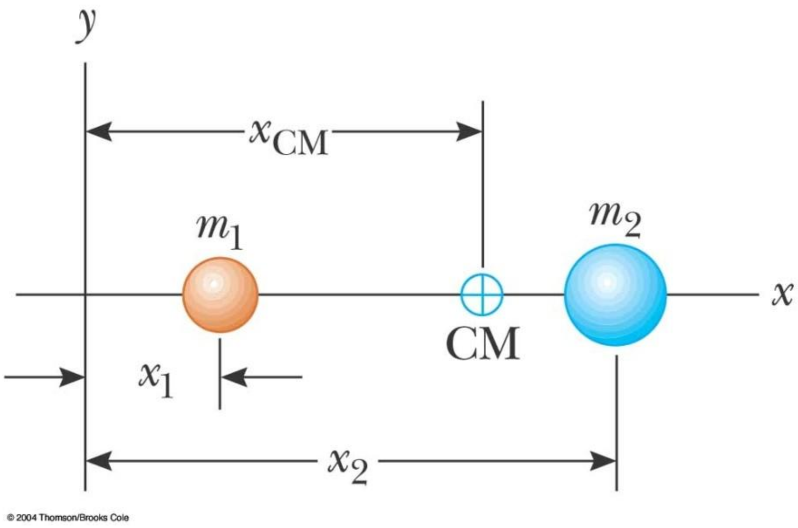
$$\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{v}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{\mathrm{CM}}}{dt^2} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

Centro de Massa, Exemplo

Ambos os corpos estão sobre o eixo dos *xx'*;

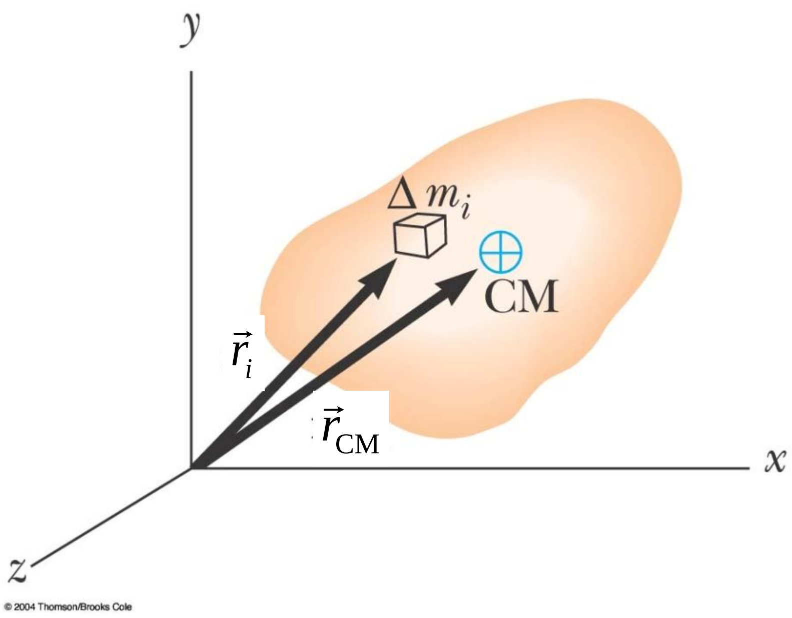
O centro de massa está sobre o eixo dos *xx'*;

O centro de massa está mais próximo da partícula com maior massa.



Centro de Massa de um Objecto Extenso

Podemos considerar um objecto extenso como um sistema contendo muitas partículas;



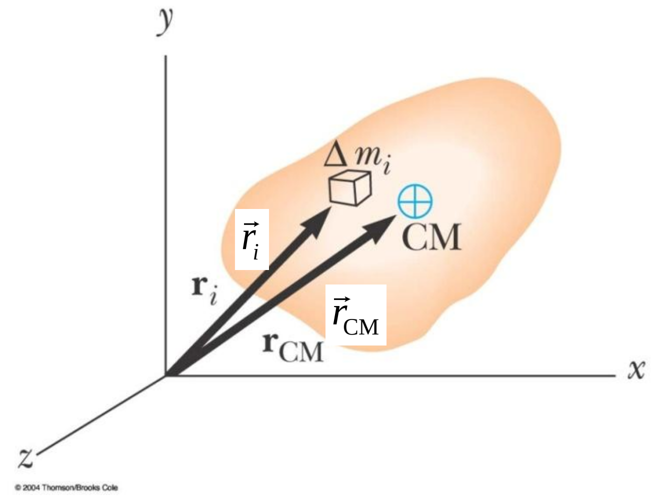
Podemos tratá-lo como uma distribuição contínua de matéria;

As "partículas" são elementos de massa infinitesimais *dm*.

Centro de Massa de um Objecto Extenso

As coordenadas do centro de massa do corpo são:

$$x_{CM} = \frac{\lim\limits_{\Delta m_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \Delta m_i}{\lim\limits_{\Delta m_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{N} \Delta m_i}$$



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Centro de Massa de um Objecto Extenso

Podemos também definir a posição do centro de massa através da expressão vectorial:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

O centro de massa de um objecto simétrico e homogéneo encontra-se sobre os eixos e planos de simetria que, eventualmente, existam.

Centro de Massa de um Objecto Extenso

Se definirmos a massa por unidade de volume:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}$$

em que *dV* é o volume do elemento de massa *dm*, obtemos, para um corpo homogéneo (ρ = c^{te}), com:

$$dm = \frac{M}{V} dV$$

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int x\, dV \quad y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int y\, dV \quad z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int z\, dV$$

Movimento de um Sistema de Partículas

Supomos que a massa total, *M*, do sistema permanece constante;

Podemos descrever o movimento do sistema em termos da velocidade e aceleração do centro de massa do sistema.

Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

$$\vec{F}_{\text{res}} = \sum_{i}^{N} \vec{F}_{\text{res}_{\text{int}_i}} + \sum_{i}^{N} \vec{F}_{\text{res}_{\text{ext}_i}}$$

$\vec{F}_{\text{res}}$ é a resultante de todas as forças que actuam no sistema, isto é, em todas as partículas do sistema;

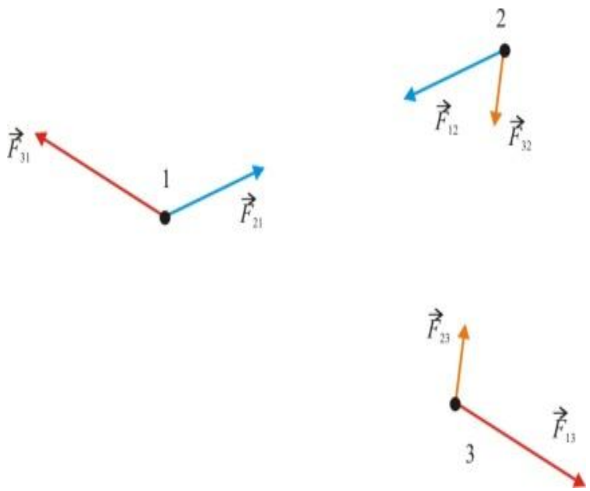
Estas forças podem dividir-se em forças interiores e forças exteriores:

As forças interiores têm origem noutras partículas do sistema.

Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

Por exemplo, para um sistema de três partículas:

$$\sum_{i}^{3}\vec{F}_{\mathrm{res}_{\mathrm{int}_i}} = \vec{F}_{21}+\vec{F}_{31}+\vec{F}_{12}+\vec{F}_{32}+\vec{F}_{13}+\vec{F}_{23}$$



A 3.ª Lei de Newton diz-nos: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$$\sum_{i}^{3}\vec{F}_{\mathrm{res}_{\mathrm{int}_i}} = \vec{F}_{21}+\vec{F}_{31}-\vec{F}_{21}+\vec{F}_{32}-\vec{F}_{31}-\vec{F}_{32}=\vec{0}$$

No caso geral:

$$\sum_{i}^{N}\vec{F}_{\mathrm{res}_{\mathrm{int}_i}} = \vec{0}$$

Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

$$\vec{F}_{\mathrm{res}_{\mathrm{ext}}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\mathrm{res}_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_{\mathrm{CM}}$$

$\vec{F}_{\mathrm{res}}$ é a resultante de todas as forças exteriores que actuam no sistema;

M é a massa total do sistema, considerada constante;

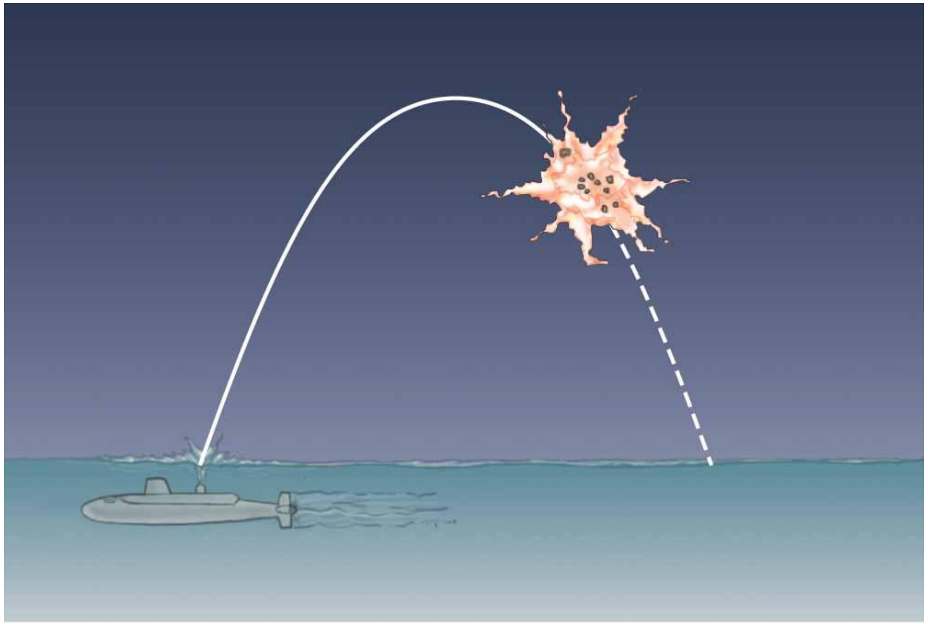
$\vec{a}_{\mathrm{CM}}$ é a aceleração do centro de massa do sistema. A equação não dá informação sobre a aceleração de outros pontos do sistema.

Movimento do Centro de Massa

Um projéctil é disparado para o ar e explode;

Sem a explosão, o projéctil seguiria a trajectória a tracejado;

Depois da explosão, o centro de massa dos fragmentos segue a linha tracejada, a trajectória parabólica que o projéctil teria seguido se não houvesse explosão.



Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas, resumo

Para um sistema de partículas:

$$M\vec{r}_{\mathrm{CM}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N$$

- Diferenciando em ordem ao tempo:

$$M\vec{v}_{\mathrm{CM}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N$$

- Diferenciando de novo em ordem ao tempo:

$$M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_N\vec{a}_N$$

Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas, resumo

Utilizando a 2.ª Lei de Newton para cada partícula individual, obtemos:

$$M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N$$

- Mas, para cada par de partículas, da 3ª Lei de Newton,

$$\vec{F}_{ij}^{\,\mathrm{int}} = -\vec{F}_{ji}^{\,\mathrm{int}}$$

- E portanto,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,\mathrm{int}} = \vec{0}$$

- A 2ª. Lei de Newton para o sistema assume a forma

$$M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{F}_1^{\,\mathrm{ext}} + \vec{F}_2^{\,\mathrm{ext}} + \ldots + \vec{F}_N^{\,\mathrm{ext}} = \vec{F}_{\mathrm{res}}^{\,\mathrm{ext}}$$

Momento Linear

O momento linear de uma partícula de massa *m* e velocidade $\vec{v}$ é

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

A unidade SI de momento linear é kg · m · s^{-1}

Newton exprimiu a 2.ª lei na forma: **A variação temporal do momento linear de uma partícula é igual à força resultante que actua na partícula**

$$\vec{F}_{\mathrm{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad m = \mathrm{c}^{\mathrm{te}} \Rightarrow \vec{F}_{\mathrm{res}} = \frac{d\ \ m\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\text{ou} \qquad \vec{F}_{\mathrm{res}} = m\vec{a}$$

Momento Linear de um Sistema de Partículas

O momento linear de um sistema de partículas é a soma vectorial dos momentos individuais de cada partícula:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N =$$

$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N$$

Ou seja,

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\mathrm{CM}}$$

O momento linear total de um sistema é igual à massa total do sistema multiplicada pela velocidade do centro de massa.

Momento Linear de um Sistema de Partículas

Diferenciando a expressão do momento linear total:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\,\frac{d\vec{v}_{\mathrm{CM}}}{dt} = M\vec{a}_{\mathrm{CM}}$$

e a 2.ª Lei de Newton para um sistema da partículas assume a forma:

$$\vec{F}_{\mathrm{ext}}^{\ \mathrm{res}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Conservação do Momento Linear de um Sistema de Partículas

Se a resultante das forças exteriores que actuam no sistema é nula, o momento linear total do sistema conserva-se:

$$\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{res}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{P} = \text{c.}^{\text{te}}$$

Conservação do Momento Linear de um Sistema de Partículas

Quando duas ou mais partículas num sistema *isolado* interactuam, o momento linear total do sistema permanece constante;

É o momento linear do *sistema* que se conserva, não necessariamente o momento linear de uma partícula individual.

Conservação do Momento Linear de um Sistema de Partículas

Podemos exprimir de várias maneiras a conservação do momento linear:

$$\vec{P}_{\text{total}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{ constante}$$

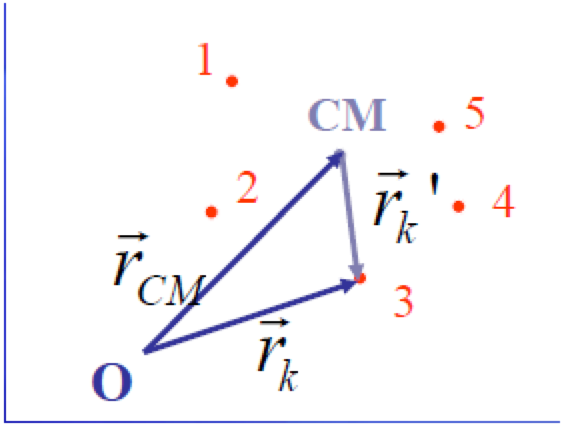
$$\vec{p}_{1_\text{i}} + \vec{p}_{2_\text{i}} = \vec{p}_{1_\text{f}} + \vec{p}_{2_\text{f}}$$

Em termos das componentes, o momento linear conserva-se independentemente em cada direcção:

$$P_{x_\text{i}} = P_{x_\text{f}} \qquad P_{y_\text{i}} = P_{y_\text{f}} \qquad P_{z_\text{i}} = P_{z_\text{f}}$$

A lei de conservação do momento é válida para sistemas com qualquer número de partículas.

Referencial do Centro de Massa



Considerando CM como origem de um referencial

$$\boxed{\vec{r}_{CM} + \vec{r}_k{}' = \vec{r}_k \Leftrightarrow \vec{r}_k{}' = \vec{r}_k - \vec{r}_{CM}}$$

$$\vec{v}_k{}' = \vec{v}_k - \vec{v}_{CM}$$

$$\sum_k m_k \vec{v}_k{}' = \sum_k m_k \vec{v}_k - \left(\sum_k m_k\right)\vec{v}_{CM} = M\vec{v}_{CM} - M\vec{v}_{CM} = 0$$

$$\vec{P}' = 0$$

Momento linear total medido no referencial do centro de massa é sempre igual a zero.

Conservação do Momento Linear, Exemplo: o Arqueiro

O arqueiro está imóvel sobre uma superfície sem atrito (gelo);

Processos de resolução:

Segunda Lei de Newton – *não*

não temos informação sobre $\vec{F}$ ou $\vec{a}$

Energia – *não*

não temos informação sobre trabalho ou energia

Momento Linear – *sim*

Conservação do Momento Linear, Exemplo: o Arqueiro

- O sistema é o arqueiro com o arco (partícula 1) e a flecha (partícula 2);

- Não existem forças externas com componente na direcção *x*, portanto em termos de momento linear o sistema é isolado no que respeita a esta direcção;

- O momento linear total antes de ter sido largada a flecha é nulo;

- A componente horizontal do momento linear total depois de ter sido largada a flecha é:

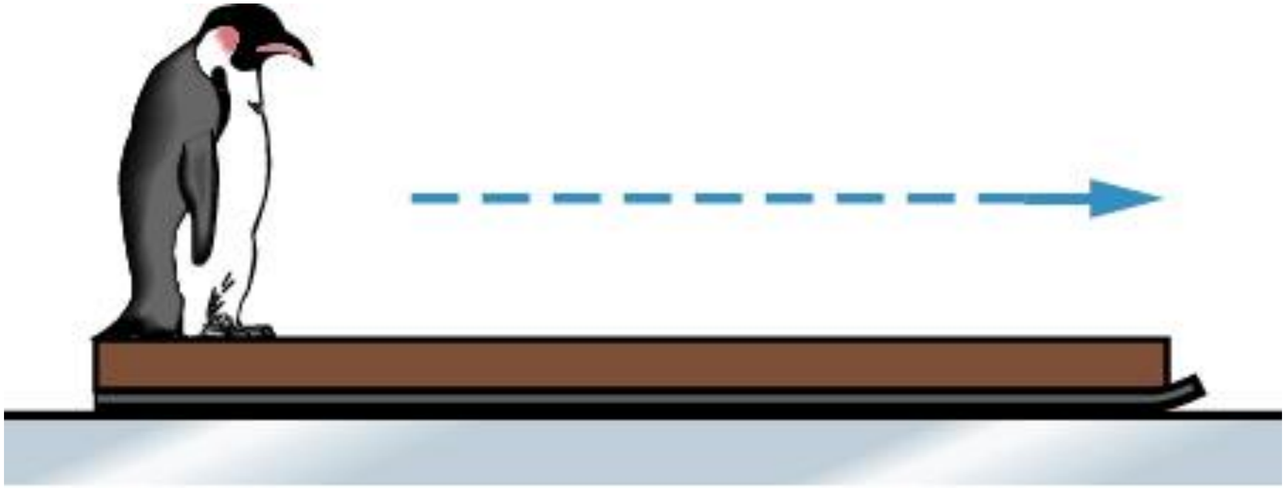
$$p_{1_{fx}} + p_{2_{fx}} = 0$$

Exemplo: o Arqueiro

- Após a flecha ser largada, o arqueiro mover-se-á no sentido oposto ao da flecha,
    - Em concordância com a 3.ª Lei de Newton

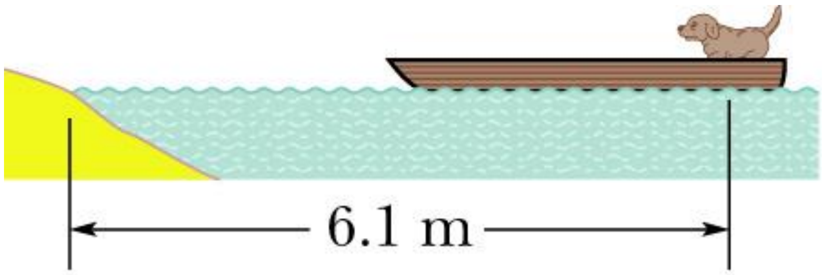
- Como a massa do arqueiro+arco é muito maior do que a massa da flecha, a sua aceleração e velocidade serão, em módulo, muito inferiores às da flecha.

Conservação do momento linear de um sistema, exemplos

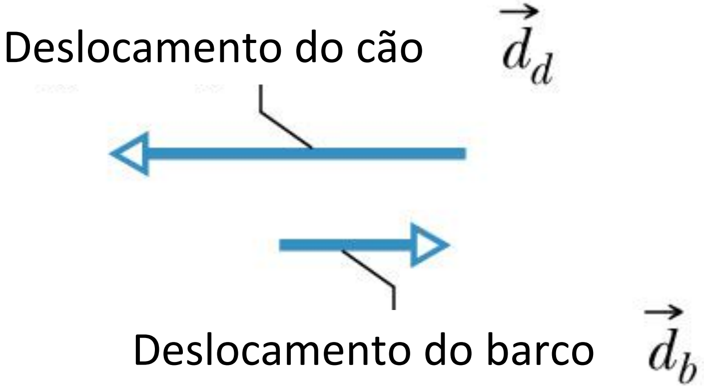


Conservação do momento linear de um sistema, exemplos

Conservação do momento linear de um sistema, exemplos



(a)



(b)

Conservação do momento linear de um sistema, exemplos